



OBTENÇÃO DE MAPAS DE ISOVELOCIDADES DE ESCOAMENTOS AXIAIS EM SISTEMAS ANULARES EXCÊNTRICOS UTILIZANDO A INVERSÃO GEOMÉTRICA

Edson José Vasques

Universidade Estadual Paulista

Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Departamento de Física

Cx.P. 178 – 13500-970 – Rio Claro, SP, Brasil

Carlos Alberto Gasparetto

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Engenharia de Alimentos

Cx.P. 6121 – Campinas, SP, Brasil

Resumo. Utilizando a técnica da inversão geométrica, como apresentada por ÖZGEN & TOSUN (1987), e tomando como base de referência os resultados experimentais de JONSSON & SPARROW (1966) são elaborados os mapas de isovelocidades do escoamento turbulento para três sistemas excêntricos. Os parâmetros, r_e^* , razão dos raios e ε , razão de excentricidade (definidos por: $r_e^* = r_{e_i} / r_{e_o}$ e $\varepsilon = e / (r_{e_o} - r_{e_i})$ onde r_{e_i} é o raio externo do tubo interno, r_{e_o} é o raio interno do tubo externo e e a distância entre os centros) dos três sistemas considerados situam-se respectivamente nos seguintes intervalos, $0,281 \leq r_e^* \leq 0,75$ e $0,6 \leq \varepsilon \leq 1$. Os mapas assim obtidos são comparados aos mapas experimentais de JONSSON & SPARROW. Dessas comparações é possível estimar qualitativamente as faixas de r_e^* e ε apropriadas para a aplicação da técnica de inversão aos escoamentos em sistemas anulares excêntricos.

Palavras chaves: Escoamento, Anulares, Inversão Geométrica, Isovelocidades.

1. INTRODUÇÃO

Os escoamentos em sistemas anulares excêntricos constituem uma importante classe de problemas e encontram-se presentes em muitas aplicações na Engenharia, tais como: perfuração e produção de petróleo e gás natural, sistemas térmicos envolvendo extrusão, trocadores de calor de tubos duplos e lubrificação em mancais. Os escoamentos anulares

excêntricos são fundamentais quando ocorrem em equipamentos para os quais foram projetados em função de determinada característica desejável, como por exemplo, o aumento da vazão devido a uma maior excentricidade e também, quando da necessidade de se prever danos se o desalinhamento de sistemas concêntricos forem causa de possíveis problemas críticos.

Os anulares excêntricos, devido a sua geometria assimétrica requerem para estudo o sistemas de coordenadas bipolares, que demanda uma solução bem mais trabalhosa, se comparada à solução para o sistema anular concêntrico, onde o sistema de coordenadas natural é o sistema cilíndrico, de menor complexidade matemática.

É natural perguntar-se: Existe uma transformação capaz de converter o sistema anular excêntrico em um sistema concêntrico? A resposta é sim, já que existe uma transformação que além de ser idêntica à sua inversa (involução) também preserva os módulos dos ângulos, isto é, isogonal; esta transformação chama-se inversão. O emprego desta transformação possibilita predizer o L.G. (lugar geométrico) das velocidades máximas e auxilia também na determinação das linhas de isovelocidades, estando no entanto, a obtenção destas linhas condicionada ao conhecimento de alguns valores de velocidades máximas.

2. SISTEMAS DE COORDENADAS E DEFINIÇÕES

Um sistema anular excêntrico é constituído pela região compreendida entre dois cilindros circulares não concêntricos, conforme representado na figura a seguir.

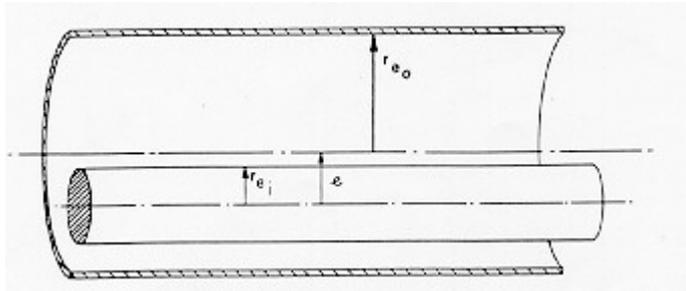


Figura 1 - Corte longitudinal parcial de um sistema anular excêntrico

O sistema de coordenadas mais apropriado para definir um anular excêntrico é o bipolar. As equações que relacionam as coordenadas cartesianas x , y , z e as coordenadas bipolares η , ξ , z , são:

$$x = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (1)$$

$$y = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (2)$$

$$z = z, \quad (3)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right], \quad (4)$$

$$\xi = \arctan \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right), \quad (5)$$

onde a é a abscissa do polo.

No sistema de coordenadas bipolar, η constante representa uma circunferência dada pela equação

$$(x - a \coth \eta)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csch}^2 \eta \quad (6)$$

No caso de ξ constante, a equação da respectiva circunferência é

$$x^2 + (y - a \cot \xi)^2 = a^2 \operatorname{csc}^2 \xi \quad (7)$$

A Figura 2 mostra que as superfícies interna e externa do sistema anular estão respectivamente em $\eta = \eta_i$ e $\eta = \eta_o$.

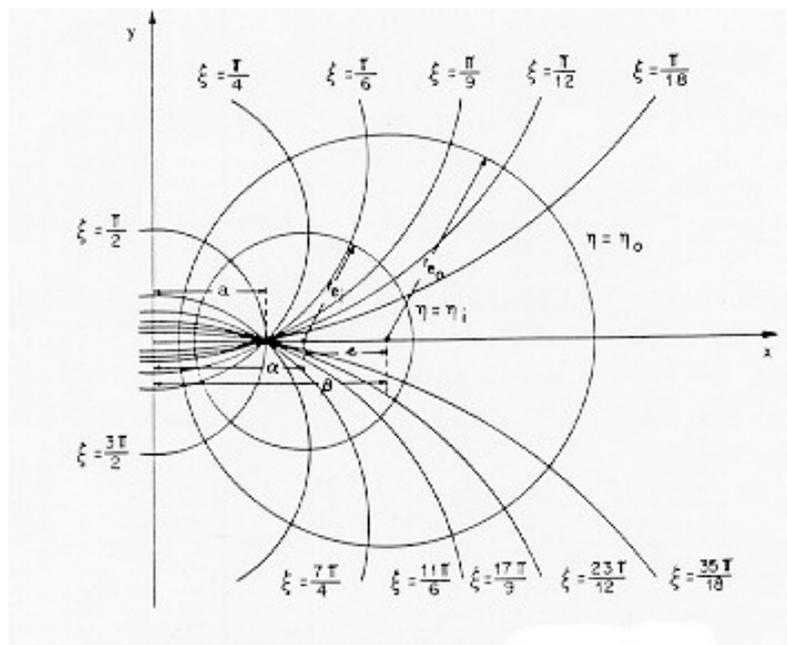


Figura 2 - Geometria do sistema anular excêntrico.

O sistema anular excêntrico é identificado pelos parâmetros r_e^* e ε , razão dos raios e razão de excentricidade, respectivamente. Sendo e a distância entre os centros, as relações que definem estes parâmetros são:

$$r_e^* = \frac{r_{e_i}}{r_{e_o}} \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{e}{r_{e_o} - r_{e_i}} \quad (9)$$

As circunferências η constante representando as superfícies externa e interna do anular excêntrico podem ser calculadas através das seguintes equações:

$$\cosh \eta_o = \frac{(1+r_e^*) + \varepsilon^2 (1-r_e^*)}{2\varepsilon}, \quad (10)$$

$$\cosh \eta_i = \frac{(1+r_e^*) - \varepsilon^2 (1-r_e^*)}{2\varepsilon r_e^*} \quad (11)$$

Assim, especificado o polo, dado pelo valor de a , os centros das circunferências η_o e η_i estarão em $(a \coth \eta_o, 0)$ e $(a \coth \eta_i, 0)$, sendo seus respectivos raios $(a \coth \eta_o)$ e $(a \coth \eta_i)$.

3. INVERSÃO GEOMÉTRICA

Os detalhes da inversão geométrica podem ser encontrados em Coxeter (1961), Eves (1972), Özgen & Tosun (1987) ou Vasques (1994). Quando o ponto A' (-a,0) ["Fig.3"] é tomado como centro de inversão, as circunferências de Apolônio representando as coordenadas η constantes, podem ser transformadas num conjunto de circunferências concêntricas com centro em D (d,0) e raios dados por

$$r_c = (a+d) \exp(-\eta) \quad (12)$$

Usando a "Eq.(12)" e a identidade

$$\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1 \quad (13)$$

obtemos as seguintes relações entre os parâmetros d, r_c e η :

$$\sinh \eta = \frac{(a+d)^2 - r_c^2}{2r_c(a+d)}, \quad \cosh \eta = \frac{(a+d) + r_c^2}{2r_c(a+d)}. \quad (14)$$

Com respeito a coordenada ξ , as circunferências representando valores constantes de ξ , passam pelo centro de inversão, ponto A', e transformam-se em retas, que passam por D, correspondendo a $\theta = \text{constante}$ em coordenadas cilíndricas. A equivalência entre as coordenadas η, ξ sob a inversão com centro A' é ilustrada na "Fig. (3)".

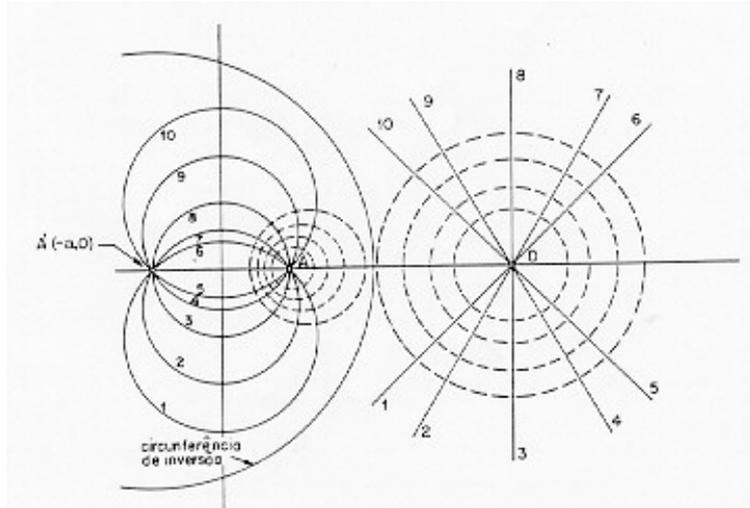


Figura 3 - Equivalência entre as coordenadas η, ξ sob a inversão com centro A' .

4. LUGAR GEOMÉTRICO (L.G.) DAS VELOCIDADES MÁXIMAS $(v_{z,max})$.

Um sistema anular excêntrico apresenta duas regiões limites de escoamento: uma em $\xi = 0$, onde o espaçamento anular é máximo e a velocidade máxima atinge o maior valor possível $v^* = V_{z,max}|_{\xi=0}$ e a outra em $\xi = \pi$, onde por ser mínimo o espaçamento, mínima será a velocidade máxima.

A inversão geométrica permite prever o L.G. das velocidades máximas, se este L.G. coincide com a linha $\eta = \eta_{max} = const.$

Para escoamento laminar no interior de sistemas anulares concêntricos, o raio que localiza o L.G. onde ocorre a velocidade máxima $(r_{c,max})$ é dado por Longwell (1966):

$$r_{c,max} = r_{c0} \left[\frac{1 - r_c^{*2}}{2 \ln \left(1 / r_c^* \right)} \right]^{1/2} \quad (15)$$

onde:

$$r_c^* = r_{c_i} / r_{c_o} \quad e \quad r_{c_i} = \text{raio externo do tubo interno} \quad e$$

$$r_{c_o} = \text{raio interno do tubo externo}$$

Trabalhos experimentais como os de Rothfus, Monrad e Senecal (1950) e Walker, Whan e Rothfus (1957) mostram que os raios que localizam o L.G. onde ocorrem as velocidades máximas nos anulares concêntricos para os regimes laminar e turbulento são aproximadamente iguais.

Em relação aos sistemas excêntricos adota-se também, conforme Heyda (1958) a coincidência entre os L(s).G(s). das $v_{z,max}$ para os regimes laminar e turbulento.

Özgen & Tosun (1987) valendo-se do trabalho experimental de Wolffe & Clump (1963), que estudaram o escoamento turbulento de ar num anular excêntrico, mostraram que a aplicação das “Equações (10), (11), (12) e (15)” ao sistema objeto de estudo, comprova que os pontos de localização das velocidades máximas $v_{z,max}$ obtidos experimentalmente situam-se no L.G. das $v_{z,max}$ predito pela inversão geométrica.

5. MAPAS DE ISOVELOCIDADES

A utilização da inversão geométrica para a obtenção de um mapa de isovelocidade requer o conhecimento de alguns valores de $v_{z,max}$ bem como de suas respectivas localizações no L.G. e, conforme indicado por Özgen & Tosun (1987) são as seguintes as operações a serem efetuadas:

- 1ª. Determina-se o correspondente sistema concêntrico para um dado sistema anular excêntrico
- 2ª. Calculam-se $r_{c,max}$ e o correspondente η_{max} .
- 3ª. Mede-se experimentalmente os valores de $v_{z,max}$ em η_{max} .
- 4ª. Utiliza-se a “Eq. (1)” para a determinação da linha ξ que passa pelo ponto localizado no L.G. das $v_{z,max}$ correspondentes a um certo valor da razão $v_{z,max}/v^*$.
- 5ª. Utilizam-se as equações de localização propostas por Knuden e Katz (1958)

$$r = r_{c_o} - \left(r_{c_o} - r_{c_{max}} \right) \left(\frac{v_z / v^*}{v_{z,max} / v^*} \right)^{7,042} \quad \text{para } r > r_{c_{max}} \quad (16)$$

$$r = r_{c_i} + \left(r_{c_{max}} - r_{c_i} \right) \left(\frac{v_z / v^*}{v_{z,max} / v^*} \right)^{9,804} \quad \text{para } r < r_{c_{max}} \quad (17)$$

- 6ª. De posse dos valores de r , utiliza-se a “Eq. (12)” para determinar os correspondentes η .
- 7ª. Repetem-se as operações 4ª, 5ª e 6ª para outros valores de $v_{z,max}/v^*$ em η_{max} , obtendo-se, assim, o L.G. de $v_z/v^* = const.$

As “Figuras 4, 6 e 8” são os mapas de isovelocidades obtidos pela inversão geométrica utilizando como base de referência o trabalho de Jonsson & Sparrow (1966). Nas legendas do canto superior esquerdo constam o número de Reynolds (Rey), a razão dos raios, r_e^* , a razão de excentricidade, ϵ , a medida do raio interno do tubo externo, r_{eo} , e a abscissa do polo, a .

As “Figuras 5 e 7” são os mapas de isovelocidades obtidos por Jonsson & Sparrow, onde, além do L.G. das $v_{z,max}$, aparece também a semicircunferência η_{max} obtida pela

técnica da inversão. Quando não há coincidência entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a linha $\eta_{max} = const.$, o mapa obtido constitui-se numa aproximação.

As “Figuras 4 e 6” exemplificam os casos em que o L.G. das $v_{z,max}$ não coincide com a linha η_{max} obtida pela técnica da inversão, enquanto que a “Fig. 8” apresenta a situação de coincidência. As “Figuras 4 e 6” são apresentadas formando pares com as “Fig. 5 e 7”, a fim de permitir uma comparação visual entre os mapas de Jonsson & Sparrow e os mapas obtidos pela inversão.

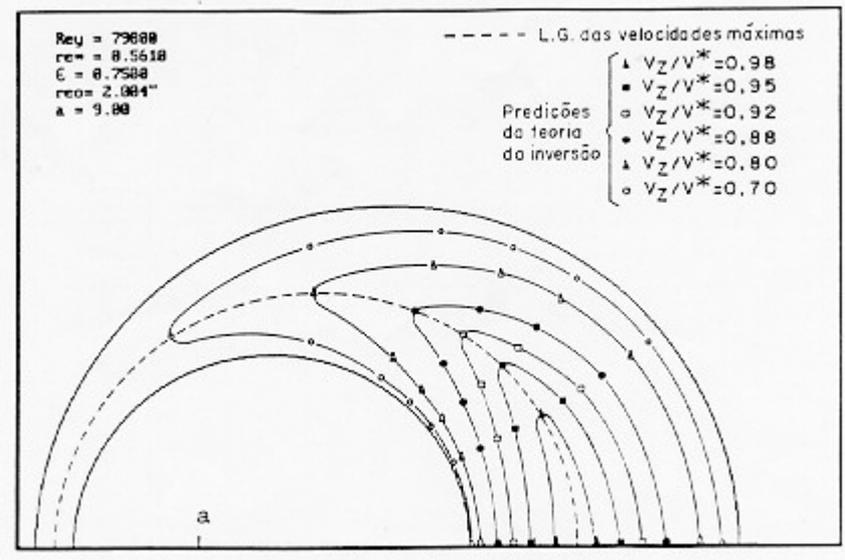


Figura 4 - Mapa de isovelocidades para escoamentos turbulentos

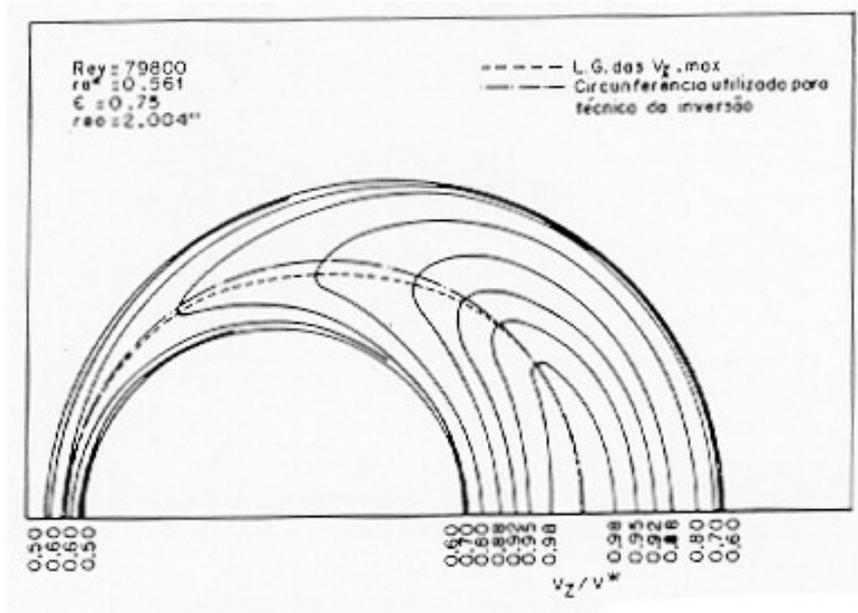


Figura 5 - Mapa de isovelocidades obtida por JONSSON & SPARROW (1966).

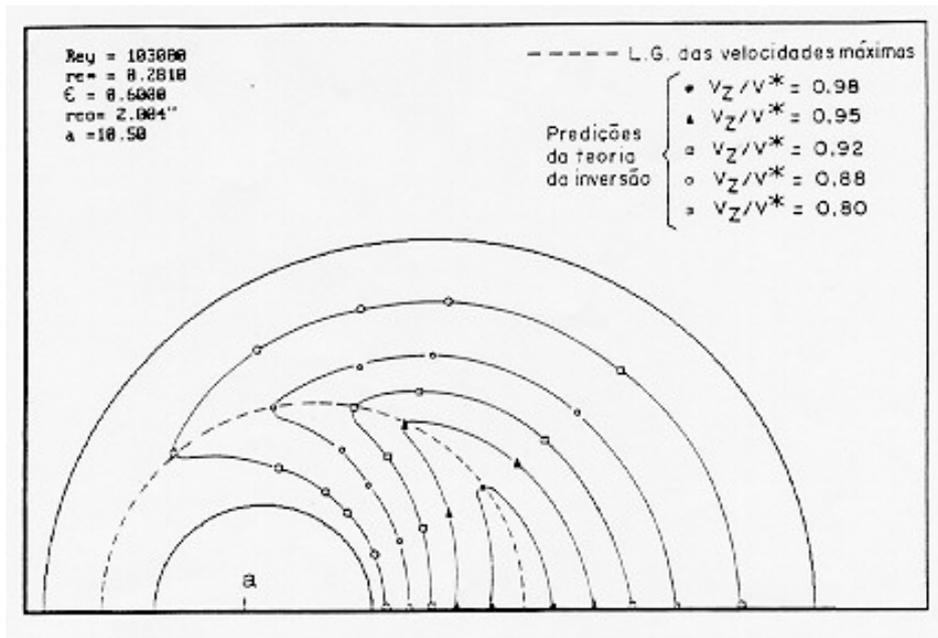


Figura 6 - Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento.

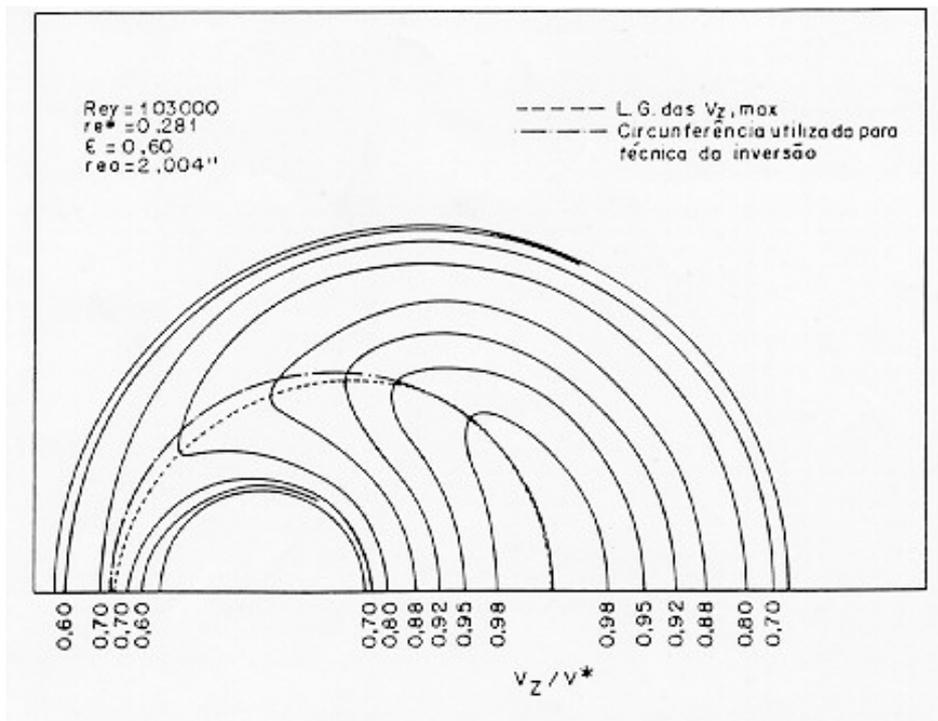


Figura 7 - Mapa de isovelocidades obtida por JONSSON & SPARROW (1966).

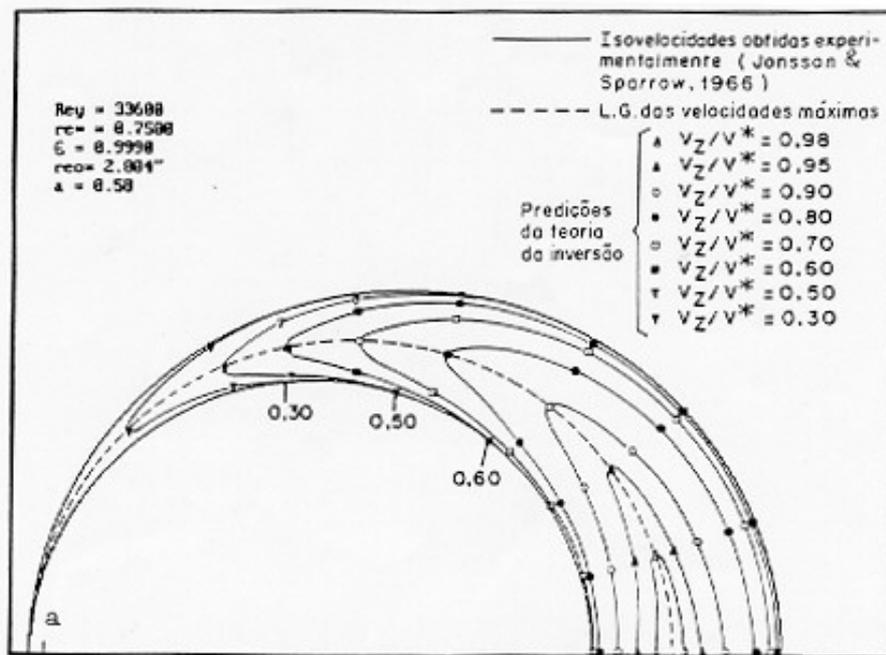


Figura 8 - Mapa de isovelocidades para escoamento turbulento.

6. CONCLUSÕES

A inversão geométrica quando aplicada aos escoamentos em sistemas anulares excêntricos tem dupla utilidade: permite prever o L.G. das velocidades máximas e, sendo conhecidos valores de $v_{z,max}$ ao longo do L.G. das $v_{z,max}$, possibilita a determinação de linhas de isovelocidades. É nesta capacidade da técnica de inversão que reside sua grande utilidade, pois, de uns poucos pontos obtidos experimentalmente é possível cobrir com linhas de isovelocidades uma grande área da seção transversal do escoamento.

Uma observação atenta das figuras 5 e 7 evidencia que, quanto maior for o afastamento entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a semicircunferência η_{max} , mais divergentes são os resultados em relação ao que seria considerado uma aproximação desejável. Podemos concluir também, que o desvio entre o L.G. das $v_{z,max}$ e a linha $\eta_{max} = const.$ depende dos parâmetros r_e^* e ϵ , com a tendência de desvio maior para maiores valores de ϵ e menores valores de r_e^* .

7. REFERÊNCIAS

- Coxeter, H.S.M., 1961, Introduction to Geometry, John Wiley, New York.
 Eves, H., 1972, A Survey of Geometry, Revised Edition, Allyn and Bacon, Inc., Boston.
 Heyda, J.F., 1958, General Electric Co. Rept. APEX-391.
 Jonsson, V.K. & Sparrow, E.M., 1966, Experiments on turbulent-flow phenomena in eccentric annular ducts, Journal of Fluid Mechanics, vol. 25, part 1, pp.65-86.

- Knudsen, J.G. & Katz, D.L., 1958, Fluid Dynamics and Heat Transfer, Mc Graw-Hill, Inc. New York.
- Longwell, P.A., 1966, Mechanics of Fluid Flow, Mc Graw-Hill, Inc.
- Özgen, C. & Tosun, I., 1987, Application of Geometric Inversion to the Eccentric Annulus System, AIChE Journal, vol. 33, n° 11, November, pp. 1903-1907.
- Özgen, C. & Tosun, I., 1987, Applications of the Geometric Inversion to the Eccentric Annulus System, pp. 1-25, Não Publicado.
- Rothfus, R.R., Monrad, C.C. Senecal, V.E., 1950, Velocity Distribution and Fluid Friction in Smooth Concentric Annuli, Industrial and Engineering Chemistry, vol 42, n° 12, pp. 2511-2520.
- Vasques, E.J., 1994, Escoamentos em Sistemas Anulares: Mapas de Velocidades. 221p. Tese (Doutorado) FEM, UNICAMP.
- Walker, J.E., Whan, G.A., & Rothfus, R.R., 1957, Fluid Friction in Non-circular Ducts, AIChE Journal vol. 3 p. 485.
- Wolffe, R.A. & Clump, C.W., 1963, The Maximum Velocity Locus for Axial Turbulent Flow in an Eccentric Annulus, AIChE Journal, vol. 9, n° 3, pp 424 e 425.

OBTENTION OF AXIAL FLOW ISOVELOCITY MAPS, FOR ECCENTRIC ANNULI SYSTEMS, VIA THE GEOMETRICAL INVERSION METHOD

Isovelocity maps for turbulent flow are obtained for several eccentric annuli systems. These maps are computed via the geometrical inversion method as presented by ÖZGEN & TOSUN (1987). The input experimental data are taken from JONSSON & SPARROW (1966). The relevant parameters are: the radius ratio $r_e^* = r_{e_i} / r_{e_o}$ (where r_{e_i} is the external radius of the inner pipe and r_{e_o} is the inner radius of the outer pipe), and the eccentricity

ratio $\varepsilon = \frac{e}{r_{e_o} - r_{e_i}}$ (where e is the distance between the pipe's centers). The three distinct

cases we study are in the parameter range $0,281 \leq r_e^* \leq 0,75$ and $0,6 \leq \varepsilon \leq 1$. Our resulting maps are compared with JONSSON & SPARROW'S experimental results. We can qualitatively estimate the r_e^* and e range within which we may appropriately apply the geometrical inversion method in order to probe the isovelocity profile for eccentric annuli systems.

Key words: Flow, Annuli Systems, Geometric Inversion, Isovelocities.